グラフの誘導木遷移問題に関する研究

著者	角 淳一朗
雑誌名	東北大学電通談話会記録
巻	89
号	1
ページ	296-297
発行年	2020-08-31
URL	http://hdl.handle.net/10097/00129115

修士学位論文要約（令和２年３月）

グラフの誘導木遷移問題に関する研究

角　淳一朗

指導教員：周　暁，学位論文指導教員：伊藤　健洋

A Study on Induced Tree Reconfiguration Problems on Graphs

Jun-ichiro SUMI

Supervisor: Xiao ZHOU，Research Advisor: Takehiro ITO

We study the problems of finding a step-by-step transformation between two given induced trees in a graph, where the step-by-step transformation is a sequence of induced trees in the same graph such that each tree can be obtained from the previous one by applying a prescribed adjacency rule. In this thesis, we study three types of adjacency rules, called TJ, TS and TAR rules, and analyze the complexity status of the problems.

1　はじめに

遷移問題とは次のような構造をした問題である [4]．探索問題 $\mathscr{P}$ の与えられた２つの実行可能解 A_0 と A_r に対して，A_0 から A_r へ段階的に遷移可能かどうかを判定する問題を**遷移問題**という．ここで，**段階的に遷移可能**であるとは，以下の条件を満たす**遷移列** $\langle A_0, A_1, \ldots, A_\ell \rangle$ が存在することをいう．

- 各 $i \in \{0, 1, \ldots, \ell\}$ に対し，A_i は探索問題 $\mathscr{P}$ の実行可能解であり，$A_\ell = A_r$ である．
- 各 $i \in \{0, 1, \ldots, \ell - 1\}$ に対し，A_{i+1} と A_i は指定されたルールの下で隣接している．

探索問題 $\mathscr{P}$ として，グラフに関する問題を考え，その実行可能解がグラフ G の頂点部分集合で表現できるとしよう．このとき，２つの実行可能解 A と A' の**隣接**関係を定めるルールとして，次の３つが有名である．

１つ目は TJ ルールである．このルールの下では，$|A \setminus A'| = |A' \setminus A| = 1$ であるとき，A と A' は隣接しているという．

２つ目は TS ルールである．このルールの下では，$A \setminus A' = \{u\}$ かつ $A' \setminus A = \{v\}$ であり，さらに u と v を結ぶ辺を G が持つとき，A と A' は隣接しているという．

３つ目は TAR ルールである．このルールの下では，$|(A \setminus A') \cup (A' \setminus A)| = 1$ であるとき，A と A' は隣接しているという．

本稿では，実行可能解として，グラフ G の誘導木を考え，**誘導木遷移問題**を扱う．ここで，**誘導木**とは，グラフ $G = (V, E)$ の頂点部分集合から誘導される部分グラフのうち，木であるものをいう．したがって，本問題の実行可能解は，グラフ G の頂点部分集合を用いて表現できる．例えば，図 1 は黒丸の 6 点で定義される誘導木である．

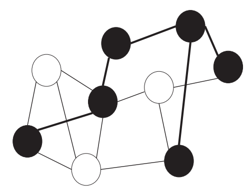

図 1: 誘導木の例

また，図 2 は誘導木 T_0 から T_r への TJ ルールの下での遷移列 $\langle T_0, T_1, T_2 = T_r \rangle$ を表している．ここで，T_0 と T_1 の間の頂点の移動は TS ルールの下でも許されるが，T_1 と T_2 の間の頂点の移動は TS ルールの下では許されないことに注意しよう．この例のように，TJ ルールと TS ルールの下では，遷移列は常に同じ頂点数の誘導木からなる．一方で，TAR ルールの下では，誘導木の頂点数は増減する．特に TAR ルールの下では，指定された値 $t \geq 0$ に対し，頂点数 t 以上の誘導木を実行可能解とみなす．

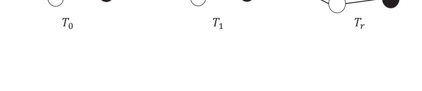

図 2: TJ ルールの下での遷移列の例

誘導木遷移問題は TJ ルール及び TS ルールの下で，計算複雑性について研究が行われてきた．以下は全て [6] の

結果である．TJ，TS ルールの誘導木遷移問題は，一般には入力グラフの最大次数が定数に限定された場合ですら PSPACE 完全であることが知られている．しかし，ここでの入力グラフの最大次数は，定数とはいえ非常に大きな値となっている．また，TJ，TS ルールの下で誘導木のサイズと遷移列の長さによりパラメータ化されたときに，W[1] 困難であることが知られている．一方で，TJ，TS ルールの下で誘導木のサイズと入力グラフの最大次数によりパラメータ化されたときに，FPT アルゴリズムが存在する．

2　本論文の結果

本論文では誘導木遷移問題の計算困難性とパラメータ複雑性に関して解析を行った．紙面の都合上，それぞれの定理に対する証明は省略するが，略証として多項式時間帰着を構成した帰着元の問題やアルゴリズムの概略を記す．

2.1　計算困難性

まずは以下に困難性の定理を与える．なお，誘導木遷移問題は計算量クラス PSPACE に含まれることは簡単に言える[4]．よって，定理 1，2 では PSPACE 困難性だけ証明すればよい．

定理 1. 誘導木遷移問題は TJ，TS，TAR ルールの下で入力グラフの最大次数が 4 の場合ですら PSPACE 完全である．

略証. 最大独立点集合遷移問題[3] からの多項式時間帰着を与えることで示した．□

定理 2. 誘導木遷移問題は TS ルールの下で入力グラフが二部グラフの場合ですら PSPACE 完全である．

略証. 独立点集合遷移問題[5] からの多項式時間帰着を与えることで示した．□

定理 3. 誘導木遷移問題は TJ，TAR ルールの下で入力グラフが最大次数 3 の平面二部グラフの場合ですら NP 困難である．

略証. 誘導木問題[1] からの多項式時間帰着を与えることで示した．□

2.2　パラメータ複雑性

次にパラメータ複雑性の結果を与える．

定理 4. 誘導木遷移問題は TAR ルールの下で $t+\ell$ をパラメータとしたときに W[1] 困難である．ただし，t は誘導木のサイズの下限であり，ℓ は遷移列の長さである．

略証. 独立点集合問題[2] からのパラメータ化帰着を与えることで示した．□

定理 5. 誘導木遷移問題は TAR ルールの下で $t+\Delta$ をパラメータとしたときに固定パラメータ容易である．ただし，t は誘導木のサイズの下限であり，Δ は入力グラフの最大次数である．

略証. 誘導木遷移問題が遷移可能であるとき，かつその時に限りサイズが t および $t+1$ のみの誘導木の遷移列が存在することを示し，サイズが t および $t+1$ の誘導木の列挙が FPT 時間でできることを示した．□

3　まとめと今後の課題

本論文では，誘導木遷移問題に対し，計算困難性とパラメータ複雑性を解析した．今後の課題としては，入力グラフの最大次数が 3 である場合，TJ，TAR ルールについては NP に属するかを示すことや，TS ルールにおいては計算複雑性を解明することが挙げられる．

参考文献

1) N. Derhy and C. Picouleau, Finding induced trees, Discrete Applied Mathematics 157, pp. 3552–3557, 2009

2) R.G. Downey and M.R. Fellows, Fixed-parameter tractability and completeness II: on completeness for W[1], Theoretical Computer Science 141(1-2), pp. 109–131, 1995.

3) R.A. Hearn and E.D. Demaine, PSPACE-completeness of sliding-block puzzles and other problems through the nondeterministic constraint logic model of computation, Theoretical Computer Science 343(1-2), pp. 72–96, 2005

4) T. Ito, E.D. Demaine, N.J.A. Harvey, C.H. Papadimitriou, M. Sideri, R. Uehara and Y. Uno, On the complexity of reconfiguration problems, Theoretical Computer Science 412(12-14), pp. 1054–1065, 2011

5) D. Lokshtanov, A.E. Mouawad, The complexity of independent set reconfiguration on bipartite graphs, Association for Computing Machinery Transactions on Algorithms 15(1), Article 7, 2018.

6) K. Wasa, K. Yamanaka and H. Arimura, The complexity of induced tree reconfiguration problems, IEICE Transactions on Information and Systems E102.D(3), pp. 464–469, 2019